Plan du cours : Intégration-probabilité continue

Pré-requis :

- Aire finie d'un domaine infini, longueur finie d'une ligne infinie
- Familiarité avec les fonctions $x \longmapsto ke^{-kx}$
- Rencontre avec la courbe de Gauss
- DM préparatoire : rappel sur les histogrammes ; notion de densité de fréquence ; première rencontre avec une variable aléatoire continue.

1. Corrigé du DM préparatoire (1h)

2. Problème 1 (2h) : Olivier et Karine
   Synthèse individuelle demandée aux élèves, relevées et corrigées avant le problème 2.
   Synthèse écrite à partir de celle des élèves données avant le problème 2.

3. Problème 2 (2h30) : Le volcan Aso
   Synthèse individuelle demandée aux élèves, relevées et corrigées.

Cours

I. Variables aléatoires continues à densité

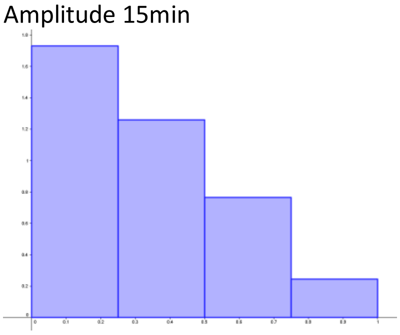
En classe de première, nous avons étudié des variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs : on les appelle des variables aléatoires discrètes.
Dans le dm9 et dans les problèmes 1 et 2, nous avons rencontré des variables aléatoires qui prennent **toutes les valeurs d'un intervalle** $\mathbb{R}$ (l'intervalle $[0; 12]$ pour le point mobile sur le triangle, l'intervalle $[0; 1]$ pour le temps d'attente du premier arrivé au café et $[0; +\infty[$ pour le volcan Aso).

Ces variables aléatoires sont dîtes continues. Elles prennent au moins théoriquement toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

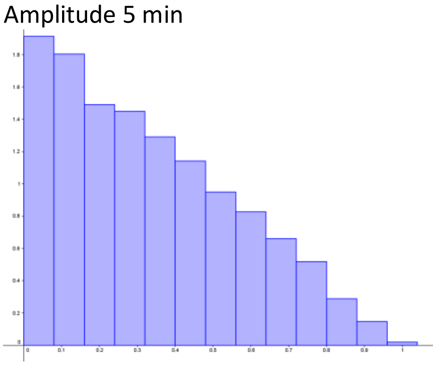
Pour étudier une variable aléatoire continue X liée à une expérience aléatoire, nous pouvons répéter cette expérience n fois et alors construire l'histogramme des fréquences. Pour n suffisamment grand, nous avons ainsi une idée dont la variable aléatoire X prend ses valeurs.
Dans certains cas, on peut avoir recours à la simulation informatique pour constituer des échantillons de grande taille des valeurs de X. Dans des échantillons de très grandes tailles, plus l'amplitude des classes représentées dans l'histogramme est petite, plus les rectangles sont étroits et plus leurs sommets semblent dessiner une courbe qui est la **même** pour tous les échantillons.

Exemple d'histogrammes obtenus dans l'étude problème 1 (rdv au café) :

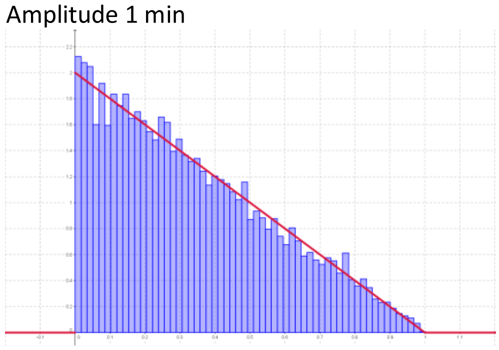
Amplitude 15min



Amplitude 5 min



Amplitude 1 min



La courbe qui semble dessiner le haut des rectangles, s'appelle la courbe de tendance des histogrammes. Elle doit être indépendante des échantillons et ne dépendre que de la variable aléatoire continue X. L'aire sous cette courbe est égale à la somme des aires des rectangles, c'est-à-dire à la somme des fréquences représentées ; **l'aire sous la courbe de tendance est donc égale à 1**.
Dans un histogramme de fréquence, la hauteur des rectangles est proportionnelle à la densité ; la fonction f représentée par la courbe de tendance est appelée <u>la fonction de densité de X</u>.
Connaître f permet de connaître X c'est-à-dire permet de calculer la probabilité que X prenne ses valeurs dans un intervalle donné.

Par exemple :

- Dans le dm9, la v.a. égale à la distance parcourue par le mobile jusqu'à son arrêt, a pour fonction de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0; 12]$ par $f(x) = \frac{1}{12}$.
- Pour le problème 1, la v.a. égale au temps d'attente du premier arrivé, a pour fonction de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2 - 2x$.
- Pour le problème 2, la v.a. égale au temps écoulé entre deux éruptions successives a pour fonction de probabilité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$.

Pour décrire la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans un intervalle I, on lui associe une fonction f définie, positive et continue sur I telle que l'aire sous la courbe C_f sur I soit égale à 1. Cette fonction est appelée <u>fonction de densité de probabilité associée à la v.a. X</u>.
On dit que la v.a. continue X a pour densité de probabilité la fonction f si, et seulement si, pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I, la probabilité que X prenne les valeurs de $[a; b]$ soit égale à l'aire sous C_f entre a et b.

Ici Dessin

Pour calculer ces probabilités, on a besoin de savoir calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive et continue sur un intervalle.

- Dans le cas, du dm9 et du problème 1, les aires à calculer sont celles de figures polygonales élémentaires (triangle, rectangle, trapèze) et on sait calculer leur aire.
- Dans le cas du volcan, on ne reconnait pas de figures planes élémentaires. Nous devons donc apprendre à calculer l'aire sous une courbe quelconque.

II. Intégrale d'une fonction continue positive

Position du problème, vocabulaire. On admet que la méthode des rectangles permet de construire deux suites (s_n) et (S_n) telles que $s_n \leq A \leq S_n$ et qui admettent la même limite a.

1. Définition de l'intégrale

Remarques sur le vocabulaire, la notation.

Exemples :

a) Calcul d'aire sous fonction affine
b) Déterminer le réel k pour que la fonction $x \longmapsto k$ soit une fonction de densité de probabilité sur $[a; b]$.
   Loi uniforme ; calcul de $P(X \in [c; d])$

2. Premières propriétés de l'intégrale

Positivité
Intégrale de a à a
relation de Chasles

Application 1 : fonction paire, fonction périodique

Application 2 :
Si la v.a. continue X a pour densité de probabilité la fonction f définie sur I alors pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I, la probabilité que X prenne les valeurs de $[a; b]$ est égale à l'aire sous C_f entre a et b soit $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$.
discussion sur I fermé borné ou non

Propriétés : Soit X une variable aléatoire continue sur un intervalle I.

(i) Pour tout intervalle J inclus dans I, $0 \leq P(X \in J) \leq 1$.

(ii) Pour tout $a \in I, P(X = a) = 0$.

(iii) Pour tout $a \in I, P(X \leq a) = P(X < a)$.

(iv) Pour tous $a, b, c \in I$, tels que $a \leq b \leq c$,
$$P(a \leq X \leq c) = P(a \leq X \leq b) + P(b < X \leq c).$$

(v) Pour tout $a \in I, P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.

(vi) Pour tous $a, b \in I$, tels que $a < b, P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$.

3. Théorème fondamental (lien primitive-intégrale)

Activité-TP+démo dans le cas où f est continue, positive et croissante sur $[a; b]$

Théorème fondamental

Exemple 1 : $A(1) = \int_0^1 t^2 dt$. On cherche A telle que $A'(x) = x^2$ et $A(0) = 0$
Les élèves proposent $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ où $k \in \mathbb{R}$
On calcule alors A(1) et on retrouve la valeur trouvée dans le problème 2.

Exemple 2 : Retour au problème 2 (le volcan)
On devait calculer $P(0 \leq X \leq 20) = \int_0^{20} 0{,}2e^{-0{,}2t} dt = A(20)$ où $A(x) = \int_0^x 0{,}2e^{-0{,}2t} dt$
On cherche une expression de $A(x)$ sachant que $A(0) = 0$.
On calcule alors $A(20)$.

Pour calculer $\int_a^b f(t)dt$, il suffit de trouver une fonction dont la dérivée est f.

4. Primitives d'une fonction (ici les fonctions sont de signe quelconque)

Définition

Exemples avec des fonctions de référence et si f est continue et positive sur $[a; b]$ alors, d'après le théorème fondamental, $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a; b]$

Théorème d'existence (démontré dans le cas où f est continue sur un intervalle fermé borné)

Propriété : ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle
Propriété : Unicité de la primitive prenant une valeur donnée en un point donné.

Primitives des fonctions usuelles (voir tableau)

5. Calcul d'intégrales

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.
On a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Démonstration, notation
Exemples

III. Lois à densité

On considère une variable aléatoire continue X définie sur un intervalle I. On rappelle que cela signifie que X prend toutes les valeurs de l'intervalle I. La loi de probabilité de X est définie par la fonction de densité de probabilité f définie sur I. On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I est une fonction de densité de probabilité si elle est positive et continue sur I telle que l'aire sous la courbe C_f sur I soit égale à 1.
Si la v.a. continue X a pour densité de probabilité la fonction f alors pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité que X prenne les valeurs de $[a;b]$ soit égale à l'aire sous C_f entre a et b soit $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$.

Les propriétés suivantes ont été prouvées en exercices

Propriétés : Soit X une variable aléatoire continue sur un intervalle I.

(vii) Pour tout intervalle J inclus dans I, $0 \leq P(X \in J) \leq 1$.
(viii) Pour tout $a \in I, P(X = a) = 0$.
(ix) Pour tout $a \in I, P(X \leq a) = P(X < a)$.
(x) Pour tous $a, b, c \in I$, tels que $a \leq b \leq c$,
$$P(a \leq X \leq c) = P(a \leq X \leq b) + P(b < X \leq c).$$

(xi) Pour tout $a \in I, P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
(xii) Pour tous $a, b \in I$, tels que $a < b, P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$.

Exemple 1 : La production quotidienne d'un produit en tonnes est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(x) = 0{,}006(10x - x^2)$.

1. Vérifier que f est une fonction de densité de probabilité.

2. Calculer $p(X \leq 7)$. En déduire la probabilité de l'événement « la production quotidienne dépasse 7 tonnes ».

1) Des modèles à connaître

a) ***Loi uniforme (cf dm)***

Définition 1 : Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ si, et seulement si, sa fonction de densité de probabilité est la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$. On note $X \backsim U_{[a;b]}$.

On a déjà vérifié que f est bien une densité de probabilité.

Propriété 1 : Soit $X \backsim U_{[a;b]}$. Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $p(X \in [a;b]) = \frac{d-c}{b-a}$.

Démonstration : déjà fait

Définition 2 : Soit $\backsim U_{[a;b]}$. On appelle espérance de X et on note $E(X)$, le réel défini par $E(X) = \int_a^b tf(t)dt$.

Propriété 2 : Si $X \backsim U_{[a;b]}$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

La démonstration sera faite ultérieurement.

b) Loi exponentielle (cf volcan)

Propriété 2 : Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ est une fonction de densité de probabilité.

Démonstration :

Définition 2 : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, sa fonction de densité de probabilité est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$. On note $X \leadsto \ (\lambda)$.

Propriété 3 : Soit $X \leadsto \ (\lambda)$. Pour tout réel a, b tels que $0 \leq a \leq b$:

a) $p(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$
b) $p(X > b) = e^{-\lambda b}$
c) $p(a < X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Démonstration :

<u>Exemple 2</u> : La durée de vie d'une ampoule, en heures, est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,002.

a) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule ne tombe pas en panne avant 100 heures d'utilisation.

b) Calculer la probabilité pour qu'une telle ampoule fonctionne au bout de 600h sachant qu'elle fonctionne encore au bout de 500h.

Propriété 4 (Durée de vie sans vieillissement) :
Si $X \sim \ (\lambda)$ alors pour tous réels positifs t et h, on a : $p_{(X \geq t)}(X \geq t + h) = p(X \geq h)$.

Démonstration :

Définition 2 : Soit $X \sim \ (\lambda)$. On appelle espérance de X et on note $E(X)$, le réel défini par $E(X) = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt$.

Propriété 3 : Si $X \sim \ (\lambda)$ alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Démonstration :